

# TD 20 : Calcul matriciel

## Produit de matrices

**1** ★ Trouver tous les produits matriciels possibles parmi les matrices suivantes et les calculer.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**2** ★★ Soit  $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Calculer  $J^2$ . En déduire  $J^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ .

**3** ★★ Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Calculer la puissance  $k$ -ième des matrices suivantes :  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  ainsi que

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**4** ★★ (Classique !) Soit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- 1) Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Déterminer  $N^k$ . En déduire  $A^k$ .
- 2) On considère les suites  $(u_n), (v_n), (w_n)$  définies par  $u_0 = v_0 = w_0 = 1$  et la relation de récurrence, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= 3v_n + w_n \\ w_{n+1} &= 3w_n \end{cases}$$

3) On pose la matrice colonne  $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ . Donner

une relation de récurrence entre  $U_{n+1}$  et  $U_n$ .

4) En déduire les valeurs de  $u_n, v_n, w_n$ .

**5** ★★ Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . Déterminer toutes les matrices qui commutent avec  $A$ , c'est-à-dire l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  telles que  $AM = MA$ .

**6** ★★★ On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ . On cherche toutes les matrices  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telles que  $X^2 = A$ . On procède par analyse-synthèse et on considère une solution  $X$  de cette équation.

- 1) Montrer que  $X$  commute avec  $A$ .
- 2) En déduire que certains coefficients de  $X$  sont nuls. Conclure.

## Matrices et algèbre

**7** ★★ Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $A^3 + 2A^2 + 3A + 4I_n = 0$ . Montrer que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

**8** ★★ On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^2 - 3A + 2I_3$ . En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

**9** ★★ Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $(A + I_3)^3$ . En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

**10** ★★ Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose que  $A$  est un diviseur de zéro de l'anneau  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $A$  n'est pas inversible.

**11** ★★ On pose

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}^* \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

- 1) Montrer que  $(G, \times)$  est un groupe.
- 2) Est-ce un sous-groupe de  $GL_2(\mathbb{R})$  ?

**12** ★★ Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice telle que  $A^2 = I_n$ . On pose

$$E = \{pI_n + qA \mid p, q \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que  $(E, +, \times)$  est un anneau commutatif.

**13** ★★★ On définit le centre de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  par

$$Z = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AB = BA\}$$

Montrer que  $A \in Z$  si et seulement si  $A$  est une matrice scalaire. *Indication : on pourra considérer les matrices élémentaires.*

---

### Matrices (anti)symétriques

---

**14** ★ Soit  $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  si et seulement si  $A$  et  $B$  commutent.

**15** ★★ Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . On pose  $B = A^\top A$ .

- 1) Montrer que  $B$  est une matrice symétrique.
- 2) Montrer que les coefficients diagonaux de  $B$  sont positifs.
- 3) Montrer que si  $B = 0$ , alors  $A = 0$ .

**16** ★★★ (Classique) Montrer que pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , il existe un unique couple  $(A, S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  tel que  $M = A + S$ . *Indication : raisonner par analyse-synthèse.*

**17** ★★★ Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $MM^\top M = I_n$ . Montrer que  $M$  est inversible. Puis que  $M$  commute avec  $M^\top$ . Enfin, montrer que  $M$  est symétrique.